16 Nombres rationnels.

I Les ensembles de nombres entiers.

Les *entiers naturels* sont les nombres qui servent à dénombrer, à compter. L'ensemble de tous les entiers naturels est :

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

Exemples.

1. 10^{13} est une entier naturel. Nous écrirons $10^{13} \in \mathbb{N}$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$ alors $2n$ est un nombre pair positif et $2n+1$ est un nombre impair positif.

Les *entiers (relatifs)* sont les entiers naturels et leurs *opposés*. L'ensemble de tous les entiers (relatifs) est :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

Exemples.

1. $-123 \in \mathbb{Z}$.
2. $123 \in \mathbb{Z}$.
3. $0 \in \mathbb{Z}$.

Remarques.

1. Il est possible de reconnaître un nombre entier par l'un de ses développements décimaux infinis. En effet l'une de ses écritures décimales ne comporte que des 0 dans la partie décimale. Par exemple : $1,000\ldots$ et $-234,000\ldots$.

Proposition 1

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ mais $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$.

II Ensemble des nombres rationnels.

1 Les nombres rationnels.

Définition 1

Les *nombres rationnels* sont les nombres qui peuvent s'écrire sous forme de fraction.
Ainsi un nombre x est rationnel s'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{a}{b}$.
L'ensemble de tous les nombres rationnels est noté : $\mathbb{Q}$.

Exemples.

1. $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{3}$ sont des nombres rationnels.
2. $1 = \frac{1}{1} \in \mathbb{Q}$.
3. $0,1 = \frac{1}{10} \in \mathbb{Q}$.
4. Les racines carrées de nombres qui ne sont pas des carrés parfaits sont irrationnels : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... sont irrationnels. Si $n \in \mathbb{N}$ et si n n'est pas un carré parfait alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
5. π et sont irrationnels.

Remarques.

1. Un entier est un nombre rationnel. Par exemple : $-13 = \frac{-13}{1}$.
2. Les nombres décimaux peuvent s'écrire comme des fractions donc ce sont des nombres rationnels. Ainsi : $0,1 = \frac{1}{10}$.
3. Il existe des nombres qui ne sont pas décimaux et qui sont rationnels. Ainsi $\frac{1}{3}$ est un nombre rationnel mais son écriture décimale est infinie v(et ne comporte pas uniquement des 9 à partir d'un certain rang) donc ce n'est un nombre décimal.
4. Tous les nombres ne sont pas rationnels.
5. Lorsqu'un nombre rationnel a une écriture décimale infinie on préfère son écriture fractionnaire.
6. Un nombre rationnel admet une écriture fractionnaire canonique (unique) appelée la *forme irréductible* qui est obtenue lorsque le PGCD des numérateur et dénominateur est 1 (ils n'ont pas de facteur commun). *confer infra.*

Proposition 2

Lorsqu'un nombre a une écriture décimale infinie périodique c'est un nombre rationnel.

Remarques.

1. Ce résultat est admis.
2. On dit que l'écriture est périodique lorsqu'une série de chiffre se reproduit indéfiniment.

Exemples.

1. $0,333\dots$ est rationnel.
2. $45,78242424\dots$ est rationnel.

2 Un nombre célèbre pour son irrationalité.

Lemme 1

Soit $p \in \mathbb{Z}$.

Si ^{2} est pair alors p est pair.

Proposition 3 - Irrationalité de $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration

Démontrons en raisonnant par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.
Il faut interpréter ceci en utilisant la définition du nombre rationnel.
Il existe donc des entiers naturels p et q avec q non nul tels que : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
Montrons que p et q sont des nombres pairs.

* Donc, en multipliant par q de part et d'autre dans l'égalité : $q\sqrt{2} = p$.
Nous allons nous ramener à l'arithmétique en utilisant des entiers naturels.

$$\left(q\sqrt{2}\right)^2 = p^2$$

nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2}\right)^2 q^2 &= p^2 \\ 2q^2 &= p^2 \end{aligned}$$

Donc p^2 est pair et, d'après le lemme p est donc pair.

* Puisque p est pair il existe k tel que $p = 2k$. Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} 2q^2 &= (2k)^2 \\ 2q^2 &= 4k^2 \\ q^2 &= 2k^2 \end{aligned}$$

Donc q^2 est pair et d'après le lemme q aussi est pair.

Nous avons obtenus ici une incohérence.

Si p et q sont pairs c'est qu'ils ont un diviseur commun : 2. La fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible ce qui contredit notre hypothèse.

Nous avons démontré, en raisonnant par l'absurde, que nécessairement, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

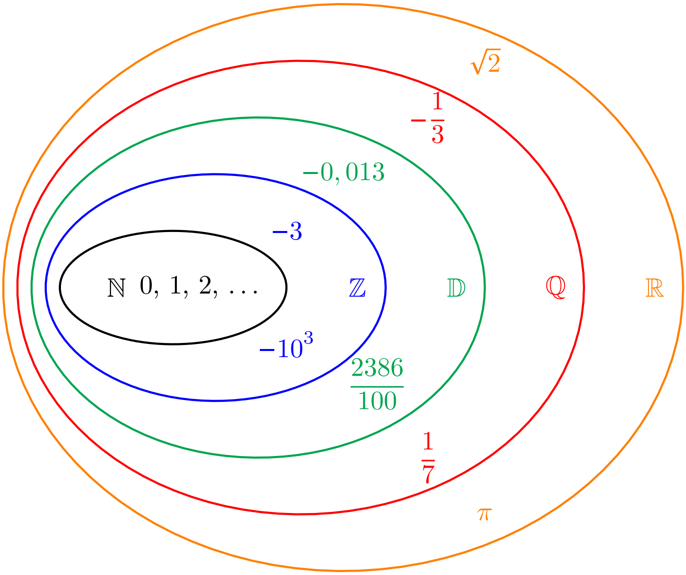
■

III Le dévissage de l'ensemble des nombres (les matriochka).

Proposition 4

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ mais $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q} \not\subset \mathbb{D} \not\subset \mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$.

Nous pouvons résumer les inclusions entre les ensembles classiques étudiés avec un diagramme de Venn qui schématise la chaîne d'inclusion : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



IV Exercices.

Exercice 1. A

Déterminez la décomposition en facteurs premiers de 180.

Exercice 2. A

Donnez la forme irréductible du nombre rationnel $\dfrac{120}{300}$.

Exercice 3. A

Évaluez les quantités suivantes en donnant le résultat sous forme de fraction irréductibles. :

a) $A = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{7}$

b) $B = \dfrac{1}{7} - \dfrac{4}{11}$

c) $C = \dfrac{-5}{3} + \dfrac{2}{7}$

d) $D = \dfrac{3}{-7} - \dfrac{-2}{3}$

Exercice 4. A

Évaluez les quantités suivantes en donnant le résultat sous forme d'une fraction irréductible :

a) $A = -\dfrac{-4}{7-3}$ b) $B = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{6}{7}$ c) $C = \dfrac{-2}{4} \times \left(-\dfrac{3}{-6}\right)$

d) $D = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{7}}$ e) $E = \dfrac{3}{\frac{5}{4}}$ f) $F = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}}{\frac{1}{7}} \times \dfrac{1}{2}$

Exercice 5. A

Calculez et donnez le résultat sous forme de fraction irréductible.

a) $A = \dfrac{-3}{2} + \dfrac{1}{5}$. b) $B = \dfrac{2}{6} \times \dfrac{3}{7}$. c) $C = \dfrac{35}{49} + \dfrac{56}{37}$.

d) $D = \dfrac{256}{47} \times \dfrac{245}{650}$. e) $E = \dfrac{\frac{4}{6} + \frac{17}{3}}{56} + \dfrac{9}{13}$.

Exercice 6. C

Déterminez sans justification le plus petit ensemble classique auquel appartient le nombre proposé.

a) $\sqrt{17}$. b) $-34\,509\,786$. c) $-0,0223$.

d) $34,45218\ldots$. e) $\dfrac{345}{100}$. f) $\dfrac{24}{7}$.

g) $\dfrac{34}{2^3 \times 5^2}$. h) $\dfrac{\frac{1}{3}}{14}$. i) $3,234 \times 10^{45}$.

j) $\pi + 3$.

Exercice 7. C

Déterminez sans justification le plus petit ensemble classique auquel appartient le nombre proposé.

a) $-\dfrac{12}{3}$. b) $-23{,}723\,723\,7\ldots$. c) $\dfrac{76987}{10}$.

d) π. e) $\sqrt{3}^2$. f) $0,987654321 \times 10^9$.

g) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. h) $\dfrac{2}{250}$. i) $3 + \sqrt{2}$.

j) $\dfrac{1}{5}$.